

# Kesalahan Akibat Integrasi Numerik pada Sinyal Pengukuran Getaran dengan Metode Euler dan Trapesium

Zainal Abidin dan Fandi Purnama

Laboratorium Dinamika, Pusat Rekayasa Industri (PAU), ITB, Bandung

Email: za@dynamic.pauir.itb.ac.id ; fan\_d11@yahoo.com

## ABSTRAK

Dalam pengukuran getaran, proses integrasi sering dilakukan terhadap sinyal percepatan maupun kecepatan getaran. Proses integrasi ini biasanya dilakukan secara numerik dalam DSA (*Dynamic Signal Analyzer*) sehingga hasil integrasi memiliki penyimpangan terhadap nilai sebenarnya (teoritik). Mengingat seringnya proses ini dilakukan dalam praktek, pada makalah ini disajikan analisis mengenai kesalahan akibat integrasi numerik. Analisis ini menghasilkan suatu persamaan teoritik yang dapat digunakan untuk menentukan besar kesalahan akibat integrasi numerik. Untuk mengindikasikan keabsahan persamaan yang diperoleh, nilai dari persamaan tersebut dicek kebenarannya dengan hasil simulasi numerik. Berdasarkan hasil simulasi ini, dapat diindikasikan bahwa persamaan yang telah diperoleh sudah benar.

**Kata kunci:** Metode numerik, integrasi numerik, metode Euler, metode trapesium.

## ABSTRACT

*In vibration measurements, integration process is often performed to acceleration as well as velocity signals. This integration process is usually done numerically in DSA (Dynamic Signal Analyzer) so that the result of integration has error with respect to the true (theoretical) value. Therefore, analyses of error due to numerical integration process is presented in this paper. The error analyses produces an equation which can determine the error value due to numerical integration process. Furthermore, the equations are validated with the simulation results. Based on the validation results, it can be concluded that the equation which have been derived are correct.*

**Keywords:** Numerical method, numerical integration, Euler method, trapezoidal method.

## PENDAHULUAN

Dalam pengukuran getaran, terdapat tiga besaran yang dapat diukur yaitu simpangan, kecepatan, dan percepatan getaran. Secara matematik, ketiga besaran tersebut memiliki hubungan yang sederhana antara satu besaran dengan yang lainnya. Simpangan adalah integral terhadap waktu dari kecepatan dan kecepatan adalah integral terhadap waktu dari percepatan.

Dalam pengukuran getaran, sering dilakukan proses integrasi dari sinyal pengukuran getaran. Proses integrasi ini dilakukan secara numerik dalam DSA (*Dynamic Signal Analyzer*) sehingga hasil integrasi yang diperoleh memiliki penyimpangan (kesalahan) terhadap nilai sebenarnya (teoritik) karena metode numerik merupakan metode pendekatan.

Kajian mengenai pengaruh masing-masing sumber kesalahan terhadap hasil integrasi sinyal pengukuran sudah pernah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya [1,2,3]. Kajian tersebut masih berupa penelitian dari hasil pengujian dan simulasi pada kasus-kasus tertentu sehingga hasilnya dikuatirkan bersifat kasuistik. Sampai saat ini belum ada penelitian teoritik yang mempelajari pengaruh parameter dalam integrasi terhadap besar kesalahan

hasil integrasi. Bertolak dari permasalahan tersebut, pada makalah ini disajikan analisis secara teoritik terhadap kesalahan akibat proses integrasi numerik pada hasil yang diperoleh.

Dalam makalah ini, analisis mengenai kesalahan akibat integrasi numerik dibatasi hanya pada integrasi lipat satu. Integrasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode Euler dan trapesium. Selain itu, analisis yang dilakukan dibatasi hanya untuk sinyal sinusoidal karena berdasarkan deret Fourier fungsi yang lain merupakan kombinasi dari beberapa fungsi sinusoidal.

## METODE PENELITIAN

Penelitian ini diawali dengan identifikasi masalah yang terjadi yaitu kesalahan hasil integrasi sinyal akibat proses integrasi numerik. Langkah selanjutnya adalah studi literatur mengenai integrasi sinyal serta literatur lain yang mendukung penulisan analisis penelitian.

Tahap selanjutnya adalah analisis mengenai kesalahan hasil integrasi numerik. Analisis ini menghasilkan suatu persamaan matematik yang dapat digunakan untuk menentukan kesalahan hasil integrasi numerik. Untuk meyakinkan bahwa persamaan matematik yang diturunkan sudah benar,

maka nilai dari persamaan tersebut divalidasi dengan hasil simulasi. Di sini, simulasi dilakukan dengan bantuan program komputer yang dibuat pada program M-file yang tersedia pada perangkat lunak MATLAB.

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### FRF dari Fungsi Integrasi Teoritik dan Numerik

Analisis kesalahan akibat integrasi numerik dimulai dari penurunan persamaan FRF yang diperoleh dari fungsi integrasi teoritik dan numerik. Berdasarkan kedua persamaan yang diturunkan, selanjutnya dapat diketahui hubungan antara masukan dan keluaran baik pada fungsi integrasi teoritik maupun numerik. Dari hubungan ini, kemudian dapat diturunkan persamaan kesalahan akibat integrasi numerik.

Besar (*magnitude*) dan fasa FRF dari integrasi teoritik dinyatakan dalam persamaan

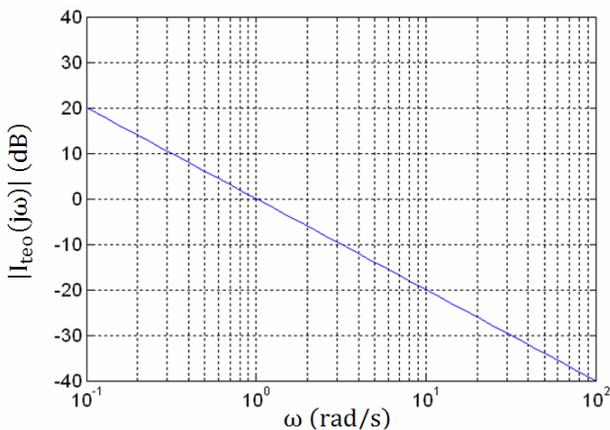
$$|I_{teor}(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \tag{1}$$

dan

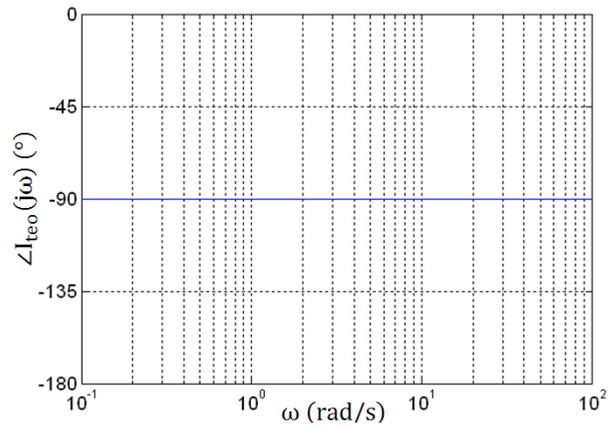
$$\angle I_{teor}(j\omega) = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} , \tag{2}$$

di mana  $|I_{teor}(j\omega)|$  menyatakan besar dan  $\angle I_{teor}(j\omega)$  menyatakan fasa FRF dari integrasi teoritik.

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1,  $|I_{teor}(j\omega)|$  yang dinyatakan dalam dB memiliki hubungan linear terhadap  $\omega$  bila digambarkan dalam skala semilog. Sementara itu, pada Gambar 2 ditunjukkan bahwa fasa  $\angle I_{teor}(j\omega)$  besarnya adalah konstan untuk semua nilai  $\omega$ .



Gambar 1. Hubungan antara  $|I_{teor}(j\omega)|$  dan  $\omega$



Gambar 2. Hubungan antara  $\angle I_{teor}(j\omega)$  dan  $\omega$

Besar dan fasa FRF dari integrasi numerik yang dilakukan dengan metode Euler dinyatakan dalam persamaan

$$|I_e(j\eta)| = \frac{\pi}{\omega_s \sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)} \tag{3}$$

dan

$$\angle I_e(j\eta) = -\frac{\pi}{2} - \pi \frac{\omega}{\omega_s} , \tag{4}$$

di mana  $|I_e(j\eta)|$  menyatakan besar dan  $\angle I_e(j\eta)$  menyatakan fasa FRF dari integrasi numerik yang dilakukan dengan metode Euler serta  $\omega_s$  menyatakan frekuensi cuplik. Sementara itu, besar dan fasa FRF dari integrasi numerik yang dilakukan dengan metode trapesium dinyatakan dalam persamaan

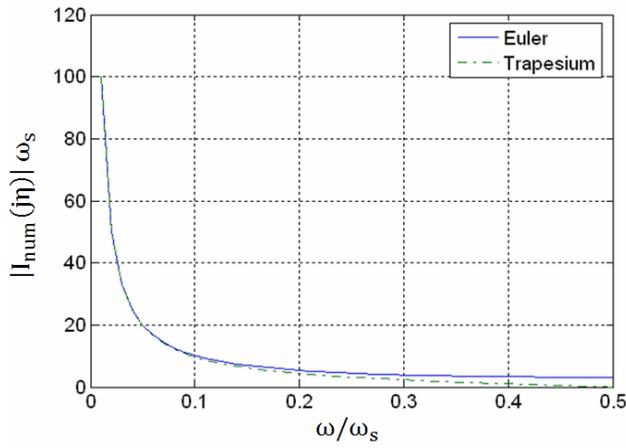
$$|I_t(j\eta)| = \frac{\pi}{\omega_s \tan\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right)} \tag{5}$$

dan

$$\angle I_t(j\eta) = -\frac{\pi}{2} , \tag{6}$$

di mana  $|I_t(j\eta)|$  menyatakan besar dan  $\angle I_t(j\eta)$  menyatakan fasa FRF dari integrasi numerik yang dilakukan dengan metode trapesium.

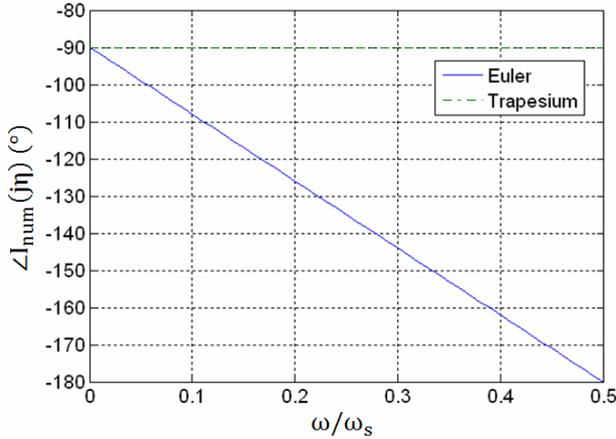
Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3, FRF dari fungsi integrasi numerik dengan metode Euler memiliki besar yang lebih tinggi dibanding dengan besar FRF dari fungsi integrasi numerik dengan metode trapesium. Sementara itu, pada Gambar 4 ditunjukkan bahwa fasa FRF dari fungsi integrasi numerik dengan metode Euler memiliki hubungan yang linear terhadap  $\omega/\omega_s$  sedangkan fasa FRF dari fungsi integrasi numerik dengan metode trapesium besarnya adalah konstan untuk semua nilai  $\omega/\omega_s$ .



Gambar 3. Hubungan antara  $|I_{num}(j\eta)| \omega_s$  dan  $\omega/\omega_s$

### Kesalahan Maksimum dari Fungsi Integrasi Numerik

Pada penelitian ini, kesalahan maksimum yang terjadi pada integrasi numerik didefinisikan sebagai nilai maksimum dari perbedaan (selisih) antara keluaran integrasi teoritik dalam bentuk diskrit ( $v_{teo}(kT)$ ) dan keluaran integrasi numerik ( $v_{num}(kT)$ ), dibagi dengan amplitudo keluaran integrasi teoritik ( $V_{teo}$ ). Secara matematik, kesalahan maksimum ini dinyatakan dalam persamaan



Gambar 4. Hubungan antara  $\angle I_{num}(j\eta)$  dan  $\omega/\omega_s$

$$E_{num,max} = \max \left( \frac{|v_{teo}(kT) - v_{num}(kT)|}{V_{teo}} \right), \quad (7)$$

Berdasarkan Persamaan (7) kesalahan maksimum dari fungsi integrasi numerik dengan metode Euler dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$E_{e,max}(r) = \left| \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{\pi r}{-1 + \pi r \cot(\pi r)} \right) \right) - \frac{\pi r}{\sin(\pi r)} \cos \left( \tan^{-1} \left( \frac{\pi r}{-1 + \pi r \cot(\pi r)} \right) - \pi r \right) \right|, \quad (8)$$

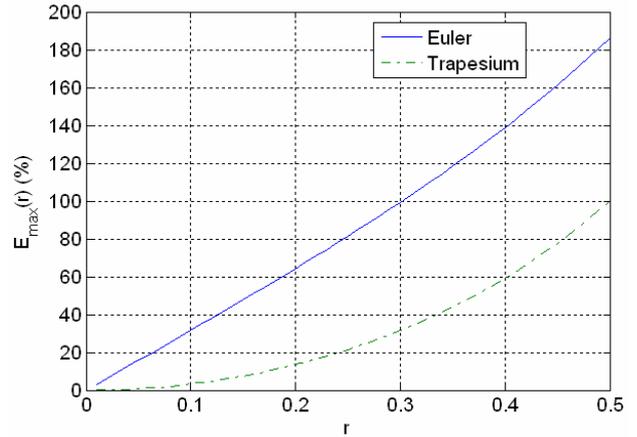
sedangkan kesalahan maksimum dari fungsi integrasi numerik dengan metode trapesium dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$E_{t,max}(r) = \left| \left( 1 - \frac{\pi r}{\tan(\pi r)} \right) \right|, \quad (9)$$

di mana

$$r = \frac{\omega}{\omega_s}. \quad (10)$$

Pada Gambar 5 ditunjukkan bahwa kesalahan maksimum pada integrasi numerik dengan metode Euler memiliki nilai yang lebih besar dibanding dengan kesalahan maksimum pada integrasi numerik dengan metode trapesium. Selain itu, dapat diungkapkan bahwa baik metode Euler maupun metode trapesium menghasilkan kesalahan maksimum yang semakin besar nilainya dengan bertambahnya nilai  $r$ .



Gambar 5. Hubungan antara Kesalahan Maksimum Integrasi Numerik dan  $r$

### Kesalahan Amplitudo dari Fungsi Integrasi Numerik

Selain dinyatakan dalam bentuk kesalahan maksimum, kesalahan integrasi numerik juga dapat dinyatakan dalam bentuk kesalahan amplitudo yang terjadi pada integrasi numerik. Kesalahan amplitudo yang dimaksud didefinisikan sebagai perbedaan (selisih) antara amplitudo keluaran dari integrasi teoritik ( $V_{teo}$ ) dan amplitudo keluaran dari integrasi numerik ( $V_{num}$ ), dibagi dengan amplitudo keluaran dari integrasi teoritik. Secara matematik, kesalahan amplitudo ini dinyatakan dalam persamaan

$$E_{num,A} = \frac{|V_{teo} - V_{num}|}{V_{teo}}, \quad (11)$$

Berdasarkan Persamaan (11) kesalahan amplitudo dari fungsi integrasi numerik dengan metode Euler dinyatakan dalam bentuk persamaan

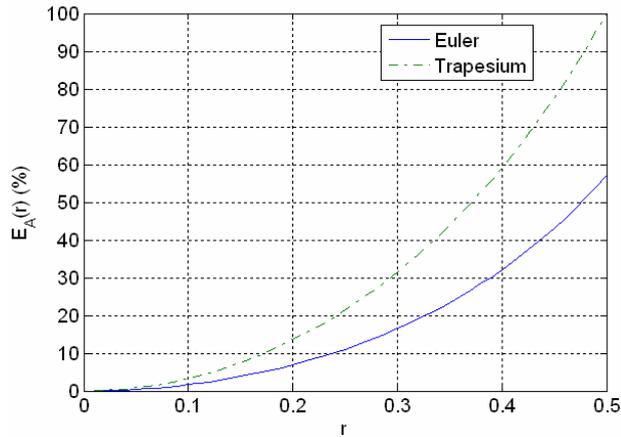
$$E_{e,A}(r) = 1 - \frac{\pi r}{\sin(\pi r)}, \quad (12)$$

sedangkan kesalahan amplitudo dari fungsi integrasi numerik dengan metode trapesium dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$E_{t,A}(r) = 1 - \frac{\pi r}{\tan(\pi r)}. \quad (13)$$

Pada Gambar 6 ditunjukkan bahwa kesalahan amplitudo pada integrasi numerik dengan metode trapesium memiliki nilai yang lebih besar dibanding dengan kesalahan amplitudo pada integrasi numerik

dengan metode Euler. Selain itu, dapat diungkapkan bahwa baik metode Euler maupun metode trapesium menghasilkan kesalahan amplitudo yang semakin besar nilainya dengan bertambahnya nilai  $r$ .



Gambar 6. Hubungan antara Kesalahan Amplitudo Integrasi Numerik dan  $r$

**Validasi Persamaan Kesalahan Maksimum dan Kesalahan Amplitudo dari Fungsi Integrasi Numerik**

Setelah dikembangkan persamaan kesalahan maksimum dan kesalahan amplitudo dari fungsi integrasi numerik untuk setiap metode, maka persamaan ini perlu divalidasi. Validasi yang dilakukan diperlukan untuk meyakinkan bahwa persamaan yang diturunkan sudah benar. Validasi ini dilakukan dengan cara membandingkan nilai kesalahan yang didapat dari persamaan dengan nilai kesalahan yang didapat dari hasil simulasi.

Simulasi dilakukan dengan cara memilih suatu sinyal diskrit dengan perbandingan frekuensi sinyal dan frekuensi cuplik yang berbeda-beda. Sinyal diskrit tersebut diintegrasikan baik secara teoritik maupun secara numerik. Selanjutnya ditentukan selisih antara sinyal yang diperoleh dari hasil integrasi numerik dan sinyal yang diperoleh dari hasil integrasi teoritik. Untuk mendapatkan kesalahan maksimum, selisih yang diperoleh perlu terlebih dahulu dibagi dengan amplitudo sinyal yang diperoleh dari hasil integrasi teoritik. Kemudian, dari hasil pembagian ini ditentukan nilai maksimum dari kesalahan pada integrasi numerik.

Sementara itu, untuk mendapatkan kesalahan amplitudo yang terjadi pada integrasi numerik perlu terlebih dahulu ditentukan spektrum linier dari sinyal yang diperoleh baik dengan metode integrasi numerik maupun integrasi teoritik. Kemudian, berdasarkan spektrum yang diperoleh ditentukan amplitudo spektrum yang menyatakan amplitudo sinyal sinusoidal yang diperoleh dari kedua metode integrasi. Setelah diperoleh amplitudonya maka dapat ditentukan selisih antara amplitudo sinyal hasil integrasi numerik dan amplitudo sinyal hasil integrasi teoritik. Untuk mendapatkan kesalahan amplitudo,

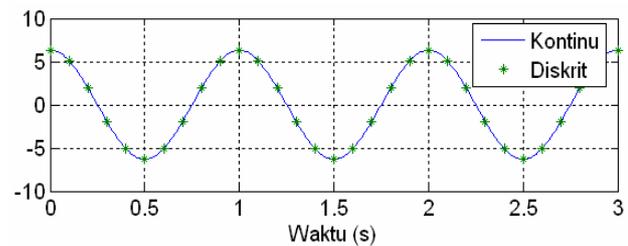
selisih yang diperoleh perlu terlebih dahulu dibagi dengan amplitudo sinyal hasil integrasi teoritik.

Dalam simulasi ini terdapat tiga kasus yang dibedakan berdasarkan variasi nilai variabel  $r$ , yaitu 0,10, 0,29, dan 0,44, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 1. Sinyal yang diintegrasikan berupa sinyal sinus dengan amplitudo ( $A$ ) yang divariasikan pada beberapa nilai yaitu 6,28, 25,13 dan 131,95. Pada saat yang sama frekuensi sinyal ( $f$ ) divariasikan untuk setiap nilai amplitudo yang dimaksud yaitu 1, 2 dan 7 Hz. Sebelum diintegrasikan sinyal sinus dicuplik dengan frekuensi pencuplikan ( $f_s$ ) sebagai berikut 10, 7 dan 16 Hz.

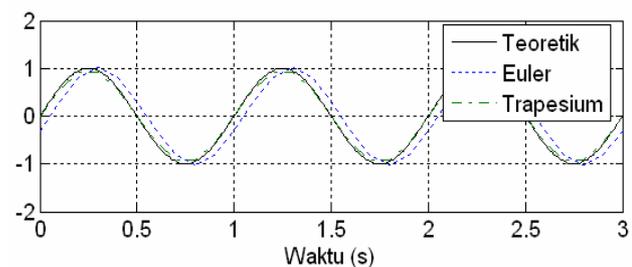
Tabel 1. Nilai  $r$ ,  $A$ ,  $f$ , dan untuk Setiap Kasus

Kasus	$r$	$A$	$f$ (Hz)	$f_s$ (Hz)
1	0,10	6,280	1	10
2	0,29	25,130	2	7
3	0,44	131,950	7	16

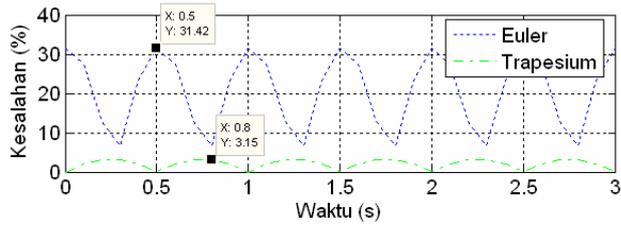
Berikut ini disajikan hasil simulasi dari ketiga kasus di atas. Gambar 7, 11 dan 15 menunjukkan sinyal sebelum diintegrasikan yaitu sinyal kontinu  $a(t)$  dan sinyal diskrit  $a(kT)$ . Sinyal  $a(kT)$  diperoleh dari pencuplikan sinyal kontinu dari masing-masing kasus. Gambar 8, 12 dan 16 menunjukkan sinyal hasil integrasi yang diperoleh baik secara numerik maupun secara teoritik. Selanjutnya, pada Tabel 2 ditunjukkan kesalahan yang terjadi pada tiap kasus baik yang diperoleh dari kesalahan maksimum maupun kesalahan amplitudo. Kesalahan maksimum diperoleh dengan cara menentukan nilai maksimum dari kesalahan yang ditunjukkan pada Gambar 9, 13 dan 17. Kesalahan amplitudo diperoleh berdasarkan amplitudo spektrum sinyal hasil integrasi teoritik dan amplitudo spektrum sinyal hasil integrasi numerik, yang masing-masing ditunjukkan pada Gambar 10, 14 dan 18.



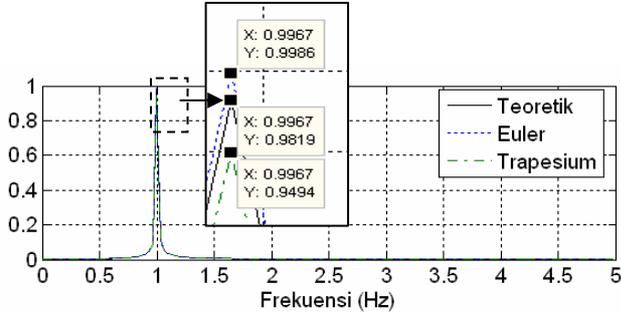
Gambar 7. Sinyal  $a(t)$  dan  $a(kT)$  pada Kasus 1



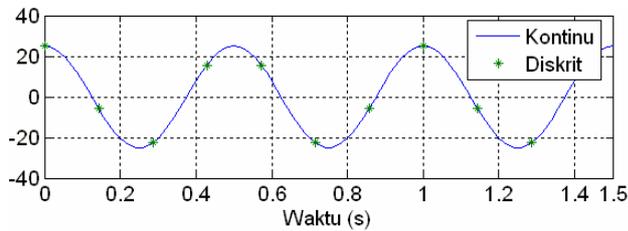
Gambar 8. Sinyal  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada Kasus 1



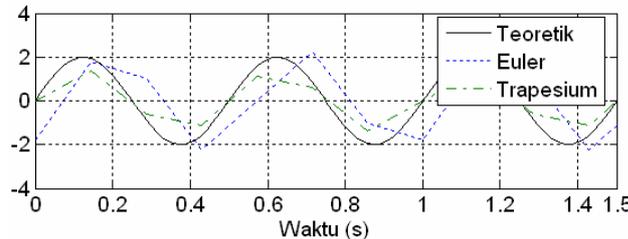
Gambar 9. Grafik Kesalahan Integrasi Numerik pada Kasus 1



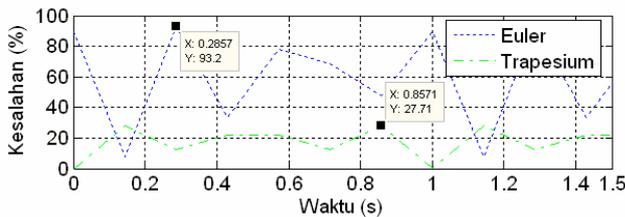
Gambar 10. Spektrum Linear  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada Kasus 1



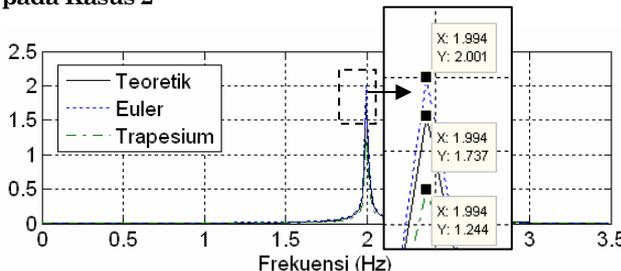
Gambar 11 Sinyal  $a(t)$  dan  $a(kT)$  pada Kasus 2



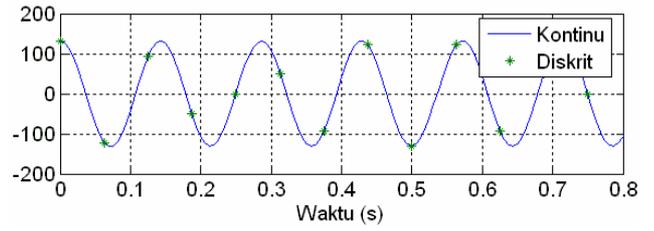
Gambar 12 . Sinyal  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada Kasus 2



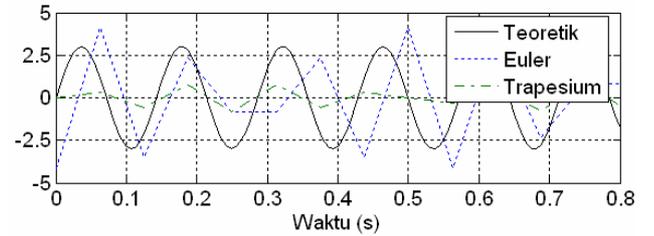
Gambar 13. Grafik Kesalahan Integrasi Numerik pada Kasus 2



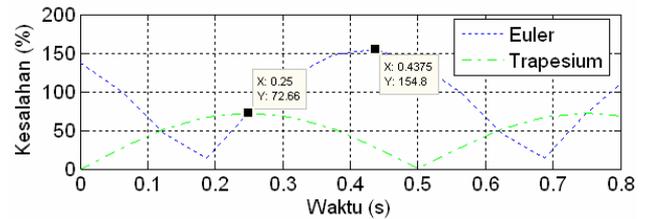
Gambar 14. Spektrum Linear  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada Kasus 2



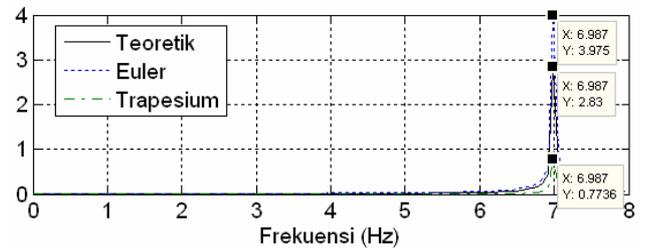
Gambar 15. Sinyal  $a(t)$  dan  $a(kT)$  pada Kasus 3



Gambar 16. Sinyal  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada Kasus 3



Gambar 17. Grafik Kesalahan Integrasi Numerik pada Kasus 3



Gambar 18. Spektrum Linear  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada Kasus 3

Pada Tabel 3 ditunjukkan perbandingan antara kesalahan integrasi numerik yang didapat dari persamaan dan kesalahan integrasi numerik yang didapat dari simulasi. Kesalahan yang dibandingkan mencakup kesalahan maksimum dan kesalahan amplitudo. Hasil perbandingan menunjukkan bahwa kesalahan yang dihitung berdasarkan persamaan memiliki kesesuaian dengan kesalahan yang diperoleh dari hasil simulasi.

Tabel 2. Nilai Kesalahan Maksimum dan Kesalahan Amplitudo Integrasi Numerik dari Hasil Simulasi

Kasus	r	Metode	$E_{max}(\%)$ Simulasi	$V_{teo}$	$V_{num}$	$E_A(\%)$ Simulasi
1	0,10	Euler	31,420	0,98	0,99	1,670
		Trapeسيوم	3,150		0,95	3,310
2	0,29	Euler	93,200	1,74	2,00	15,180
		Trapeسيوم	27,710		1,24	28,420
3	0,44	Euler	154,790	2,83	3,98	40,500
		Trapeسيوم	72,660		0,77	72,660

**Tabel 3. Perbandingan Antara Nilai Kesalahan Maksimum dan Kesalahan Amplitudo Integrasi Numerik dari Persamaan dan Hasil Simulasi**

Kasus	r	Metode	E <sub>max</sub> (%)		E <sub>A</sub> (%)	
			Sim	Pers	Sim	Pers
1	0,10	Euler	31,420	31,590	1,670	1,660
		Trapeسيوم	3,150	3,310	3,310	3,310
2	0,29	Euler	93,200	94,150	15,180	15,310
		Trapeسيوم	27,710	28,420	28,420	29,330
3	0,44	Euler	154,790	155,470	40,500	40,130
		Trapeسيوم	72,660	72,660	72,660	72,660

### KESIMPULAN

Berdasarkan persamaan matematik yang dikembangkan dapat disimpulkan bahwa baik metode Euler maupun metode trapesium menghasilkan kesalahan maksimum dan kesalahan amplitudo yang semakin besar nilainya dengan bertambahnya nilai r. Selain itu, juga dapat disimpulkan bahwa kesalahan maksimum pada integrasi numerik dengan metode Euler memiliki nilai yang lebih besar dibanding dengan kesalahan maksimum pada integrasi numerik

dengan metode trapesium. Sebaliknya, kesalahan amplitudo pada integrasi numerik dengan metode Euler memiliki nilai yang lebih kecil dibanding dengan kesalahan amplitudo pada integrasi numerik dengan metode trapesium.

### DAFTAR PUSTAKA

1. Avitabile, P. dan Hodgkins, J., *Numerical Evaluation of Displacement and Acceleration for A Mass, Spring, Dashpot System*. Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Annual Conference & Exposition, 2004.
2. Avitabile, P. dan Zandt, T. V., *Developing A Virtual Model of a Second Order System to Simulation Real Laboratory Measurement Problems*. Proceeding of 2004 IMECE, Anaheim, CA, 2004.
3. Zandt, T. V., *Numerical Integration and Differentiation Tutorial*. University of Massachusetts Lowell, 2004.