

# Kesalahan Akibat Deferensiasi Numerik pada Sinyal Pengukuran Getaran dengan Metode Beda Maju, Mundur dan Tengah

Zainal Abidin dan Fandi Purnama

Lab. Dinamika – Pusat Rekayasa Industri, ITB, Bandung

E-mail: za@dynamic.pauir.itb.ac.id ; fan\_d11@yahoo.com

## ABSTRAK

Dalam pengukuran getaran, proses deferensiasi sering dilakukan terhadap sinyal simpangan maupun kecepatan getaran. Proses deferensiasi ini biasanya dilakukan secara numerik dalam DSA (*Dynamic Signal Analyzer*) sehingga hasil deferensiasi memiliki penyimpangan terhadap nilai sebenarnya (teoritik). Mengingat seringnya proses ini dilakukan dalam praktek, pada makalah ini disajikan analisis mengenai kesalahan akibat deferensiasi numerik. Analisis ini menghasilkan suatu persamaan teoritik yang dapat digunakan untuk menentukan besar kesalahan akibat deferensiasi numerik. Untuk mengindikasikan keabsahan persamaan yang diperoleh, nilai dari persamaan tersebut dicek kebenarannya dengan hasil simulasi numerik. Berdasarkan hasil simulasi ini, dapat diindikasikan bahwa persamaan yang telah diperoleh sudah benar.

**Kata kunci:** Metode numerik, deferensiasi numerik, beda maju, beda mundur, beda tengah.

## ABSTRACT

*In vibration measurements, differentiation process is often performed to displacement as well as velocity signals. This differentiation process is usually done numerically in DSA (Dynamic Signal Analyzer) so that the result of differentiation has error with respect to the true (theoretical) value. Therefore, analyses of error due to numerical differentiation process is presented in this paper. The error analyses produces an equation which can determine the error value due to differentiation process. Furthermore, the equations are validated with the simulation results. Based on the validation results, it can be concluded that the equation which have been derived are correct.*

**Keywords:** Numerical method, numerical differentiation, forward difference, backward difference, centered difference.

## PENDAHULUAN

Dalam pengukuran getaran, terdapat tiga besaran yang dapat diukur yaitu simpangan, kecepatan, dan percepatan getaran. Secara matematik, ketiga besaran tersebut memiliki hubungan yang sederhana antara satu besaran dengan yang lainnya. Kecepatan adalah deferensiasi terhadap waktu dari simpangan dan percepatan adalah deferensiasi terhadap waktu dari kecepatan.

Dalam pengukuran getaran, sering dilakukan proses deferensiasi dari sinyal pengukuran getaran. Proses deferensiasi ini dilakukan secara numerik dalam DSA (*Dynamic Signal Analyzer*) sehingga hasil deferensiasi yang diperoleh memiliki penyimpangan (kesalahan) terhadap nilai sebenarnya (teoritik) karena metode numerik merupakan metode pendekatan.

Kajian mengenai pengaruh masing-masing sumber kesalahan terhadap hasil deferensiasi sinyal pengukuran sudah pernah dilakukan oleh beberapa peneliti sebelumnya [1,2,3]. Kajian tersebut masih berupa penelitian dari hasil pengujian dan simulasi pada kasus-kasus tertentu sehingga hasilnya dikuatirkan bersifat kasuistis. Sampai saat ini belum ada penelitian teoritik yang mempelajari pengaruh parameter dalam deferensiasi terhadap besar kesalahan hasil deferensiasi. Bertolak dari permasalahan tersebut, pada makalah ini disajikan analisis secara teoritik terhadap kesalahan akibat proses deferensiasi numerik pada hasil yang diperoleh.

Dalam makalah ini, analisis mengenai kesalahan akibat deferensiasi numerik dibatasi hanya pada deferensiasi pertama. Deferensiasi numerik dilakukan dengan menggunakan metode beda maju

(forward difference), beda mundur (backward difference), dan beda tengah (centered difference). Selain itu, analisis yang dilakukan dibatasi hanya untuk sinyal sinusoidal karena berdasarkan deret Fourier fungsi yang lain merupakan kombinasi dari beberapa fungsi sinusoidal.

**METODE PENELITIAN**

Penelitian ini diawali dengan identifikasi masalah yang terjadi yaitu kesalahan hasil deferensiasi sinyal akibat proses deferensiasi numerik. Langkah selanjutnya adalah studi literatur mengenai deferensiasi sinyal serta literatur lain yang mendukung penulisan analisis penelitian.

Tahap selanjutnya adalah analisis mengenai kesalahan hasil deferensiasi numerik. Analisis ini menghasilkan suatu persamaan matematik yang dapat digunakan untuk menentukan kesalahan hasil deferensiasi numerik. Untuk meyakinkan bahwa persamaan matematik yang diturunkan sudah benar, maka nilai dari persamaan tersebut divalidasi dengan hasil simulasi. Di sini, simulasi dilakukan dengan bantuan program komputer yang dibuat pada program M-file yang tersedia pada perangkat lunak MATLAB.

**HASIL DAN PEMBAHASAN**

**FRF Fungsi Deferensiasi Teoritik dan Numerik**

Analisis kesalahan akibat deferensiasi numerik dimulai dari penurunan persamaan FRF yang diperoleh dari fungsi deferensiasi teoritik dan numerik. Berdasarkan kedua persamaan yang diturunkan, selanjutnya dapat diketahui hubungan antara keluaran dan masukan baik pada fungsi deferensiasi teoritik maupun numerik. Dari hubungan ini, kemudian dapat diturunkan persamaan kesalahan akibat deferensiasi numerik.

Besar (magnitude) dan fasa FRF dari deferensiasi teoritik dinyatakan dalam persamaan:

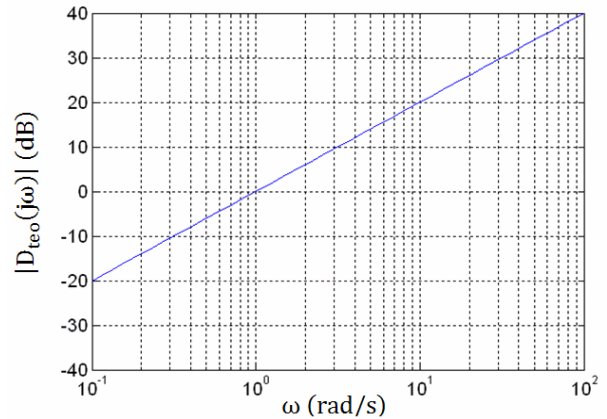
$$|D_{teo}(j\omega)| = \omega \tag{1}$$

dan

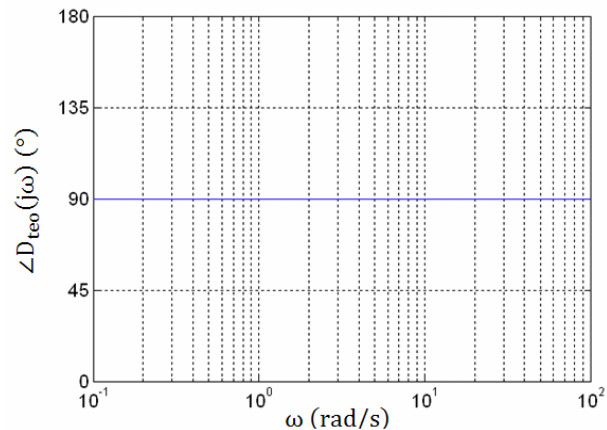
$$\angle D_{teo}(j\omega) = \frac{\pi}{2} \text{ rad} . \tag{2}$$

di mana  $|D_{teo}(j\omega)|$  menyatakan besar dan  $\angle D_{teo}(j\omega)$  menyatakan fasa FRF dari deferensiasi teoritik.

Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 1,  $|D_{teo}(j\omega)|$  yang dinyatakan dalam dB memiliki hubungan linear terhadap  $\omega$  bila digambarkan dalam skala semilog. Sementara itu, pada Gambar 2 ditunjukkan bahwa fasa  $\angle D_{teo}(j\omega)$  besarnya adalah konstan untuk semua nilai  $\omega$ .



Gambar 1. Hubungan antara  $|D_{teo}(j\omega)|$  dan  $\omega$



Gambar 2. Hubungan antara  $\angle D_{teo}(j\omega)$  dan  $\omega$

Besar dan fasa FRF dari deferensiasi numerik ditentukan berdasarkan tiga metode yaitu metode beda maju, metode beda mundur dan metode beda tengah. Besar dan fasa FRF dari deferensiasi numerik yang dilakukan dengan metode beda maju dinyatakan dalam persamaan:

$$|D_f(j\eta)| = \frac{\omega_s}{\pi} \sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right) \tag{3}$$

dan

$$\angle D_f(j\eta) = \frac{\pi}{2} + \left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right) \tag{4}$$

di mana  $|D_f(j\eta)|$  menyatakan besar dan  $\angle D_f(j\eta)$  menyatakan fasa FRF dari deferensiasi numerik yang dilakukan dengan metode beda maju serta  $\omega_s$  menyatakan frekuensi cuplik. Besar dan fasa FRF dari deferensiasi numerik yang dilakukan dengan metode beda mundur dinyatakan dalam persamaan

$$|D_b(j\eta)| = \frac{\omega_s}{\pi} \sin\left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right) \tag{5}$$

dan

$$\angle D_b(j\eta) = \frac{\pi}{2} + \left(\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right) \tag{6}$$

di mana  $|D_b(j\eta)|$  menyatakan besar dan  $\angle D_b(j\eta)$  menyatakan fasa FRF dari deferensiasi numerik

yang dilakukan dengan metode beda mundur. Besar dan fasa FRF dari deferensiasi numerik yang dilakukan dengan metode beda tengah dinyatakan dalam persamaan

$$|D_c(j\eta)| = \frac{\omega_s}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{\omega}{\omega_s}\right) \quad (7)$$

dan

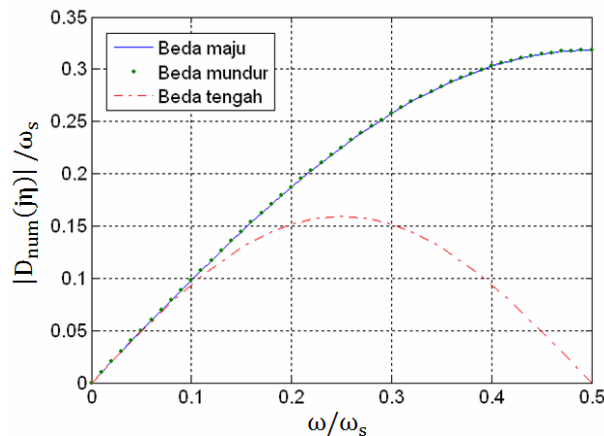
$$\angle D_c(j\eta) = \frac{\pi}{2} \quad (8)$$

di mana  $|D_c(j\eta)|$  menyatakan besar dan  $\angle D_c(j\eta)$  menyatakan fasa FRF dari deferensiasi numerik yang dilakukan dengan metode beda tengah.

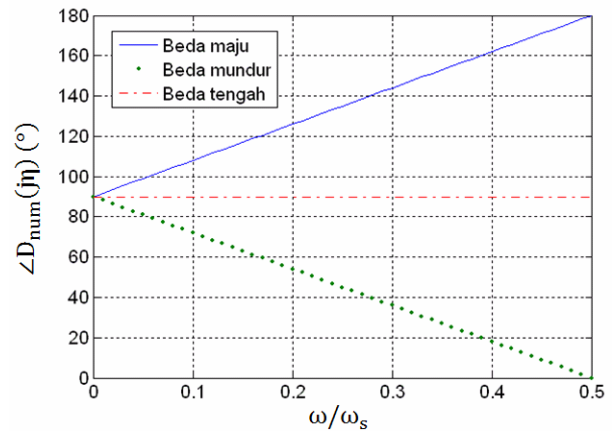
Sebagaimana ditunjukkan pada Gambar 3, FRF dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda maju memiliki besar yang sama dengan besar FRF dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda mundur sedangkan FRF dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda tengah memiliki besar yang lebih rendah dibanding dengan besar FRF dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda maju dan beda mundur. Sementara itu, pada Gambar 4 ditunjukkan bahwa fasa FRF dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda maju dan beda mundur memiliki hubungan yang linear terhadap  $\omega/\omega_s$  sedangkan fasa FRF dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda tengah besarnya adalah konstan untuk semua nilai  $\omega/\omega_s$ .

### Kesalahan Maksimum dari Fungsi Deferensiasi Numerik

Pada penelitian ini, kesalahan maksimum yang terjadi pada deferensiasi numerik didefinisikan sebagai nilai maksimum dari perbedaan (selisih) antara keluaran deferensiasi teoritik dalam bentuk diskrit ( $v_{teo}(kT)$ ) dan keluaran deferensiasi numerik ( $v_{num}(kT)$ ), dibagi dengan amplitudo keluaran deferensiasi teoritik ( $V_{teo}$ ). Secara matematik, kesalahan maksimum ini dinyatakan dalam persamaan



Gambar 3. Hubungan antara  $|D_{num}(j\eta)|$  dan  $\omega/\omega_s$



Gambar 4. Hubungan antara  $\angle D_{num}(j\eta)$  dan  $\omega/\omega_s$

$$E_{num,max} = \max\left(\left|\frac{v_{teo}(kT) - v_{num}(kT)}{V_{teo}}\right|\right) \quad (9)$$

Berdasarkan Persamaan (9) kesalahan maksimum dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda maju, beda mundur dan beda tengah dinyatakan dalam bentuk persamaan:

$$E_{f,max}(r) = \left| \sin\left(\tan^{-1}\left(\cot(\pi r) - \frac{\pi r}{\sin^2(\pi r)}\right)\right) - \frac{\sin(\pi r)}{\pi r} \sin\left(\tan^{-1}\left(\cot(\pi r) - \frac{\pi r}{\sin^2(\pi r)}\right) + \pi r\right) \right| \quad (10)$$

$$E_{b,max}(r) = \left| \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\pi r}{\sin^2(\pi r)} - \cot(\pi r)\right)\right) - \frac{\sin(\pi r)}{\pi r} \sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{\pi r}{\sin^2(\pi r)} - \cot(\pi r)\right) - \pi r\right) \right| \quad (11)$$

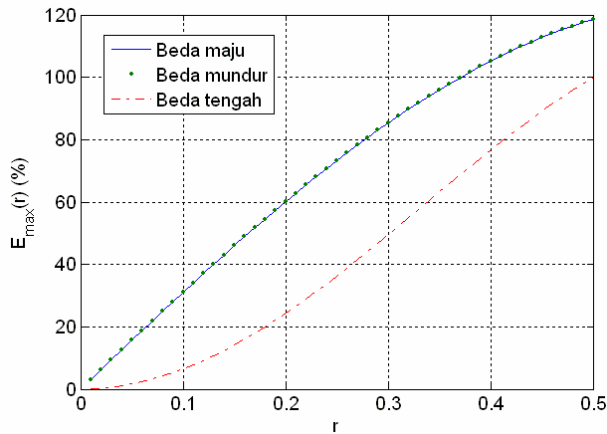
dan

$$E_{c,max}(r) = \left| 1 - \frac{\sin(2\pi r)}{2\pi r} \right| \quad (12)$$

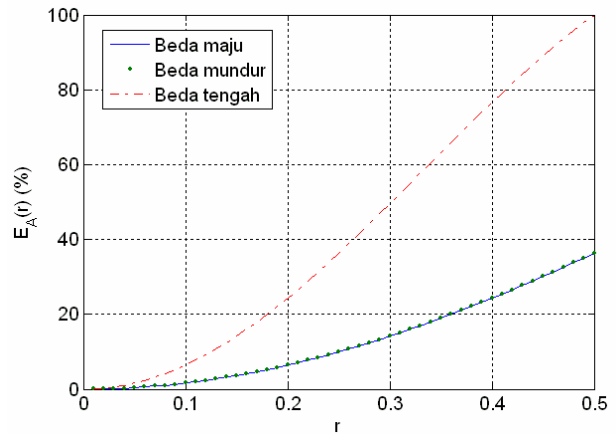
di mana  $E_{f,max}(r)$  menyatakan kesalahan maksimum dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda maju,  $E_{b,max}(r)$  menyatakan kesalahan maksimum dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda mundur,  $E_{c,max}(r)$  menyatakan kesalahan maksimum dari fungsi deferensiasi numerik dengan metode beda tengah, dan

$$r = \frac{\omega}{\omega_s} \quad (13)$$

Pada Gambar 5 ditunjukkan bahwa deferensiasi numerik dengan metode beda mundur dan beda maju memiliki nilai kesalahan maksimum yang sama sedangkan kesalahan maksimum pada deferensiasi numerik dengan metode beda tengah memiliki nilai yang lebih kecil dibanding dengan kesalahan maksimum pada deferensiasi numerik dengan metode beda maju dan beda mundur. Selain itu, dapat diungkapkan bahwa ketiga metode yaitu metode beda maju, beda mundur, dan beda tengah menghasilkan kesalahan maksimum yang semakin besar nilainya dengan bertambahnya nilai  $r$ .



Gambar 5 Hubungan antara kesalahan maksimum diferensiasi numerik dan r



Gambar 6. Hubungan antara kesalahan amplitudo diferensiasi numerik dan r

**Kesalahan Amplitudo dari Fungsi Diferensiasi Numerik**

Selain dinyatakan dalam bentuk kesalahan maksimum, kesalahan diferensiasi numerik juga dapat dinyatakan dalam bentuk kesalahan amplitudo yang terjadi pada diferensiasi numerik. Kesalahan amplitudo yang dimaksud didefinisikan sebagai perbedaan (selisih) antara amplitudo keluaran dari diferensiasi teoritik ( $V_{teo}$ ) dan amplitudo keluaran dari diferensiasi numerik ( $V_{num}$ ), dibagi dengan amplitudo keluaran dari diferensiasi teoritik. Secara matematik, kesalahan amplitudo ini dinyatakan dalam persamaan

$$E_{num,A} = \frac{|V_{teo} - V_{num}|}{V_{teo}} \tag{14}$$

Berdasarkan Persamaan 14 kesalahan amplitudo dari fungsi diferensiasi numerik dengan metode beda maju, beda mundur, dan beda tengah dinyatakan dalam bentuk persamaan

$$E_{f,A}(r) = 1 - \frac{\sin(\pi r)}{\pi r} \tag{15}$$

$$E_{b,A}(r) = 1 - \frac{\sin(\pi r)}{\pi r} \tag{16}$$

dan

$$E_{c,A}(r) = 1 - \frac{\sin(2\pi r)}{\pi r} \tag{17}$$

di mana  $E_{f,A}(r)$  menyatakan kesalahan amplitudo dari fungsi diferensiasi numerik dengan metode beda maju,  $E_{b,A}(r)$  menyatakan kesalahan amplitudo dari fungsi diferensiasi numerik dengan metode beda mundur, dan  $E_{c,A}(r)$  menyatakan kesalahan amplitudo dari fungsi diferensiasi numerik dengan metode beda tengah.

Pada Gambar 6 ditunjukkan bahwa diferensiasi numerik dengan metode beda mundur dan beda maju memiliki nilai kesalahan amplitudo yang sama sedangkan kesalahan amplitudo pada diferensiasi numerik dengan metode beda tengah memiliki nilai

yang lebih besar dibanding dengan kesalahan amplitudo pada diferensiasi numerik dengan metode beda maju dan beda mundur. Selain itu, dapat diungkapkan bahwa ketiga metode yaitu metode beda maju, beda mundur, dan beda tengah menghasilkan kesalahan amplitudo yang semakin besar nilainya dengan bertambahnya nilai r.

**Validasi Persamaan Kesalahan Maksimum dan Kesalahan Amplitudo dari Fungsi Diferensiasi Numerik**

Setelah dikembangkan persamaan kesalahan maksimum dan kesalahan amplitudo dari fungsi diferensiasi numerik untuk setiap metode, maka persamaan ini perlu divalidasi. Validasi yang dilakukan diperlukan untuk meyakinkan bahwa persamaan yang diturunkan sudah benar. Validasi ini dilakukan dengan cara membandingkan nilai kesalahan yang didapat dari persamaan dengan nilai kesalahan yang didapat dari hasil simulasi.

Simulasi dilakukan dengan cara memilih suatu sinyal diskrit dengan perbandingan frekuensi sinyal dan frekuensi cuplik yang berbeda-beda. Sinyal diskrit tersebut dideferensiasikan baik secara teoritik maupun secara numerik. Selanjutnya ditentukan selisih antara sinyal yang diperoleh dari hasil diferensiasi numerik dan sinyal yang diperoleh dari hasil diferensiasi teoritik. Untuk mendapatkan kesalahan maksimum, selisih yang diperoleh perlu terlebih dahulu dibagi dengan amplitudo sinyal yang diperoleh dari hasil diferensiasi teoritik. Kemudian, dari hasil pembagian ini ditentukan nilai maksimum dari kesalahan pada diferensiasi numerik.

Sementara itu, untuk mendapatkan kesalahan amplitudo yang terjadi pada diferensiasi numerik perlu terlebih dahulu ditentukan spektrum linier dari sinyal yang diperoleh baik dengan metode diferensiasi numerik maupun diferensiasi teoritik. Kemudian, berdasarkan spektrum yang diperoleh

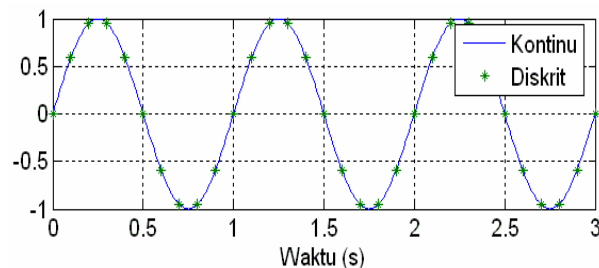
ditentukan amplitudo spektrum yang menyatakan amplitudo sinyal sinusoidal yang diperoleh dari kedua metode deferensiasi. Setelah diperoleh amplitudonya maka dapat ditentukan selisih antara amplitudo sinyal hasil deferensiasi numerik dan amplitudo sinyal hasil deferensiasi teoritik. Untuk mendapatkan kesalahan amplitudo, selisih yang diperoleh perlu terlebih dahulu dibagi dengan amplitudo sinyal hasil deferensiasi teoritik.

Dalam simulasi ini terdapat tiga kasus yang dibedakan berdasarkan variasi nilai variabel  $r$ , yaitu 0,10, 0,29, dan 0,44, sebagaimana ditunjukkan pada Tabel 1. Sinyal yang dideferensiasikan berupa sinyal sinus dengan amplitudo ( $A$ ) yang divariasikan pada beberapa nilai yaitu 1, 2 dan 3. Pada saat yang sama frekuensi sinyal ( $f$ ) divariasikan untuk setiap nilai amplitudo yang dimaksud yaitu 1, 2 dan 7 Hz. Sebelum dideferensiasikan sinyal sinus dicuplik dengan frekuensi pencuplikan ( $f_s$ ) sebagai berikut 10, 7 dan 16 Hz.

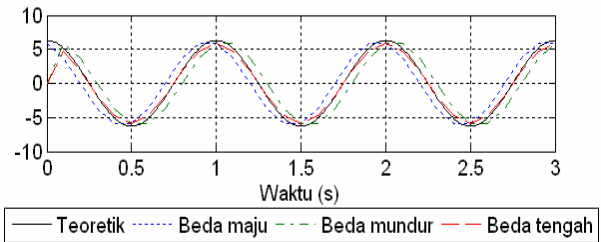
Berikut ini disajikan hasil simulasi dari ketiga kasus di atas. Gambar 7, 11 dan 15 menunjukkan sinyal sebelum dideferensiasikan yaitu sinyal kontinu  $a(t)$  dan sinyal diskrit  $a(kT)$ . Sinyal  $a(kT)$  diperoleh dari pencuplikan sinyal kontinu dari masing-masing kasus. Gambar 8, 12 dan 16 menunjukkan sinyal hasil deferensiasi yang diperoleh baik secara numerik maupun secara teoritik. Selanjutnya, pada Tabel 2 ditunjukkan kesalahan yang terjadi pada tiap kasus baik yang diperoleh dari kesalahan maksimum maupun kesalahan amplitudo. Kesalahan maksimum diperoleh dengan cara menentukan nilai maksimum dari kesalahan yang ditunjukkan pada Gambar 9, 13 dan 17. Kesalahan amplitudo diperoleh berdasarkan amplitudo spektrum sinyal hasil deferensiasi teoritik dan amplitudo spektrum sinyal hasil deferensiasi numerik, yang masing-masing ditunjukkan pada Gambar 10, 14 dan 18.

Tabel 1. Nilai  $r$ ,  $A$ ,  $f$ , dan Untuk Setiap Kasus

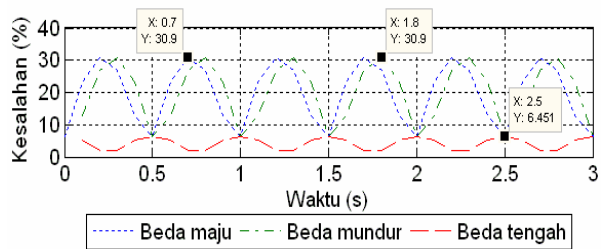
Kasus	$r$	$A$	$f$ (Hz)	$f_s$ (Hz)
1	0,10	1	1	10
2	0,29	2	2	7
3	0,44	3	7	16



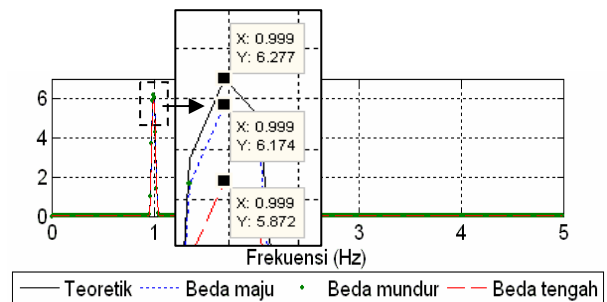
Gambar 7. Sinyal  $x(t)$  dan  $x(kT)$  pada kasus 1



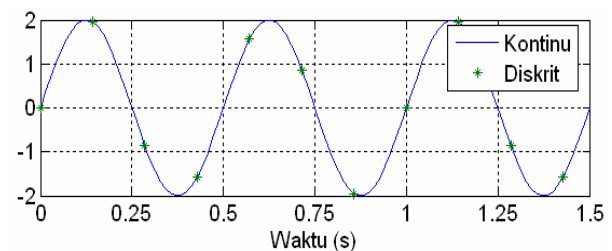
Gambar 8. Sinyal  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada kasus 1



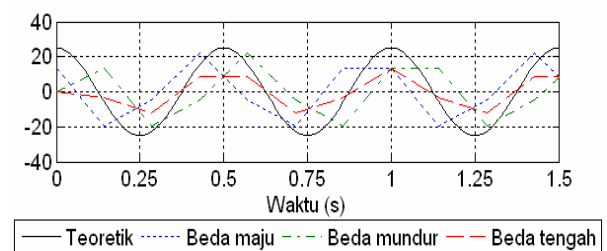
Gambar 9. Grafik kesalahan deferensiasi numerik pada kasus 1



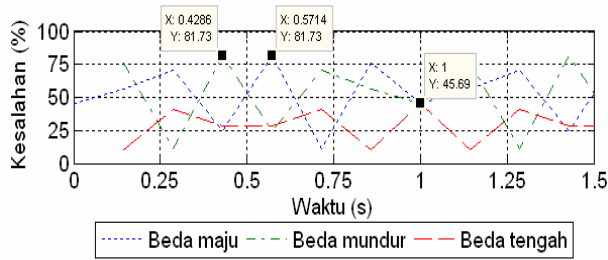
Gambar 10. Spektrum linear  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada kasus 1



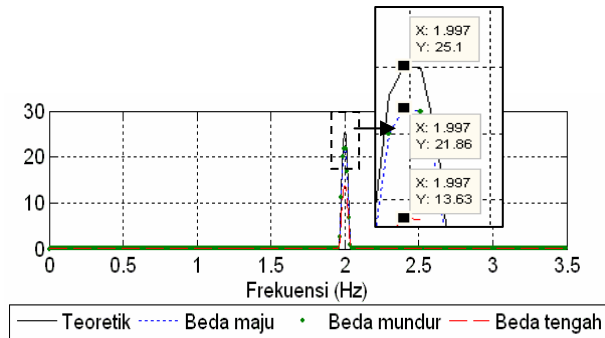
Gambar 11. Sinyal  $x(t)$  dan  $x(kT)$  pada kasus 2



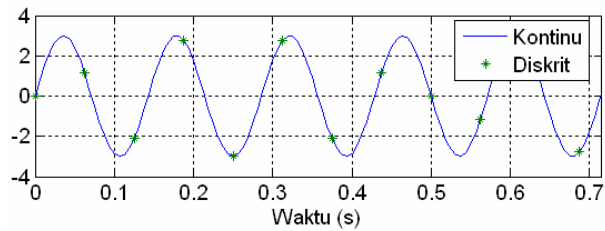
Gambar 12. Sinyal  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada kasus 2



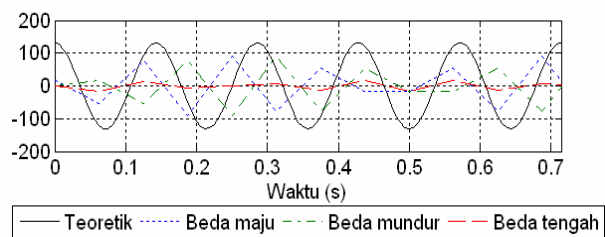
Gambar 13. Grafik kesalahan diferensiasi numerik pada kasus 2



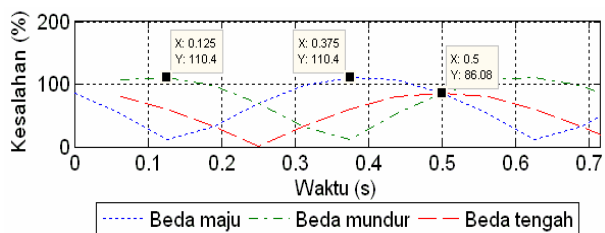
Gambar 14. Spektrum linear  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada kasus 2



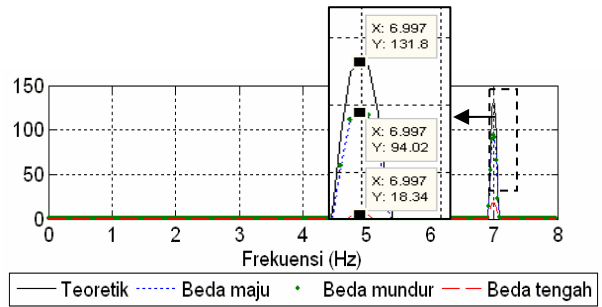
Gambar 15. Sinyal  $x(t)$  dan  $x(kT)$  pada kasus 3



Gambar 16. Sinyal  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada kasus 3



Gambar 17. Grafik kesalahan diferensiasi numerik pada kasus 3



Gambar 18. Spektrum linear  $v_{teo}(kT)$  dan  $v_{num}(kT)$  pada kasus 3

Tabel 2. Nilai Kesalahan Maksimum dan Kesalahan Amplitudo Diferensiasi Numerik dari Hasil Simulasi

Kasus	r	Metode	$E_{max}(\%)$ Simulasi	$V_{teo}$	$V_{num}$	$E_A(\%)$ Simulasi
1	0,10	Beda maju	30,90	6,28	6,17	1,64
		Beda mundur	30,90	6,28	6,17	1,64
		Beda tengah	6,45	6,28	5,87	6,45
2	0,29	Beda maju	81,73	25,10	21,86	12,90
		Beda mundur	81,73	25,10	21,86	12,90
		Beda tengah	45,69	25,10	13,63	45,69
3	0,44	Beda maju	110,36	131,76	94,02	28,64
		Beda mundur	110,36	131,76	94,02	28,64
		Beda tengah	86,08	131,76	18,34	86,08

Tabel 3. Perbandingan Antara Nilai Kesalahan Maksimum dan Kesalahan Amplitudo Diferensiasi Numerik dari Persamaan dan Hasil Simulasi

Kasus	r	Metode	$E_{max}(\%)$		$E_A(\%)$	
			Sim	Pers	Sim	Pers
1	0,10	Beda maju	30,90	31,07	1,64	1,64
		Beda mundur	30,90	31,07	1,64	1,64
		Beda tengah	6,45	6,45	6,45	6,45
2	0,29	Beda maju	81,73	82,01	12,90	12,90
		Beda mundur	81,73	82,01	12,90	12,90
		Beda tengah	45,69	45,69	45,69	45,69
3	0,44	Beda maju	110,36	110,94	28,64	28,64
		Beda mundur	110,36	110,94	28,64	28,64
		Beda tengah	86,08	86,08	86,08	86,08

Pada Tabel 3 ditunjukkan perbandingan antara kesalahan diferensiasi numerik yang didapat dari persamaan dan kesalahan diferensiasi numerik yang didapat dari simulasi. Kesalahan yang dibandingkan mencakup kesalahan maksimum dan kesalahan amplitudo. Hasil perbandingan menunjukkan bahwa kesalahan yang dihitung berdasarkan persamaan memiliki kesesuaian dengan kesalahan yang diperoleh dari hasil simulasi.

## KESIMPULAN

Berdasarkan persamaan matematik yang dikembangkan dapat disimpulkan bahwa ketiga metode yaitu metode beda maju, beda mundur, dan beda tengah menghasilkan kesalahan maksimum dan kesalahan amplitudo yang semakin besar nilainya dengan bertambahnya nilai r.

Selain itu, juga dapat disimpulkan bahwa deferensiasi numerik dengan metode beda mundur dan beda maju memiliki nilai kesalahan maksimum dan kesalahan amplitudo yang sama. Sementara itu, deferensiasi numerik dengan metode beda tengah memiliki kesalahan maksimum yang lebih kecil dibanding dengan kesalahan maksimum pada diferensiasi numerik dengan metode beda maju dan beda mundur. Sebaliknya kesalahan amplitudo pada deferensiasi numerik dengan metode beda tengah memiliki nilai yang lebih besar dibanding dengan kesalahan amplitudo pada diferensiasi numerik dengan metode beda maju dan beda mundur.

## DAFTAR PUSTAKA

1. Avitabile, P. dan Hodgkins, J., *Numerical Evaluation of Displacement and Acceleration for A Mass, Spring, Dashpot System*. Proceedings of the 2004 American Society for Engineering Annual Conference & Exposition, 2004.
2. Avitabile, P. dan Zandt, T. V., *Developing A Virtual Model of a Second Order System to Simulation Real Laboratory Measurement Problems*. Proceeding of 2004 IMECE, Anaheim, CA, 2004.
3. Zandt, T. V., *Numerical Integration and Differentiation Tutorial*. University of Massachusetts Lowell, 2004.